Uma Avaliação Crítica da Linguagem Lógica Subsidiada pela Teoria de Conjuntos Aproximados

Maria do Carmo Nicoletti[1]
UFSCar – DC
C.P. 676 -13560-950 São Carlos – SP
Fone/fax: +55 16 261-8233
marian@cse.unsw.edu.au

Sandra Abib
UFSCar – DC
C.P. 676 - 13560-950 São Carlos – SP
Fone/fax: +55 16 261-8233
sandra@dc.ufscar.br

Resumo: Este artigo aborda os principais conceitos que subsidiam o estabelecimento da linguagem lógica baseada na Teoria de Conjuntos Aproximados, usada na representação de conhecimento incerto, analisando-os criticamente.

Palavras-Chaves: conjuntos aproximados, lógica baseada em conjuntos aproximados, representação de conhecimento incerto, inteligência artificial.

1. Introdução

A Teoria de Conjuntos Aproximados (TCA) foi proposta por Pawlak em [Pawlak (1982)] como uma extensão da teoria clássica de conjuntos, para a representação de conhecimento incerto e incompleto, em sistemas baseados em conhecimento. Conjuntos aproximados podem ser considerados como conjuntos com fronteiras não bem definidas — conjuntos que não podem ser caracterizados precisamente usando a informação disponível.

Durante os últimos anos a TCA tem sido abordada como uma ferramenta formal usada em conexão com diferentes áreas de pesquisa. Existem investigações das relações entre a TCA e a Teoria de Dempster-Shafer [Skowron & Grzymala-Busse (1994)] bem como entre conjuntos aproximados e conjuntos *fuzzy* [Pawlak (1994)]. A TCA tem também subsidiado o desenvolvimento de alguns sistemas de aprendizado de máquina [Mrózek (1992)] [Pawlak (1985)] [Wong et. al. (1986)]. Além disso, tem sido usada para a representação de conhecimento [Orlowska & Pawlak (1984)], na implementação de técnicas de *data mining* [Aasheim & Solheim (1996)], na representação de dados imprecisos [Szladow & Ziarko (1993)] e na redução dos descritores iniciais em sistemas de representação de conhecimento através da análise de dependência de atributos [Jelonek et al. (1994)] entre muitos outros.

Este artigo aborda o formalismo que subsidia a Teoria de Conjuntos Aproximados como uma linguagem lógica, à semelhança do cálculo proposicional, que pode ser usada para a expressão e representação do conhecimento de um determinado domínio. Essa abordagem é feita considerando e apresentando a proposta de Pawlak para uma lógica de decisão baseada na TCA. No artigo são apresentadas as principais idéias daquela proposta, exatamente como descritas em [Pawlak (1991)], as quais são analisadas criticamente. O artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 são apresentados os conceitos básicos e a notação adotada pela TCA (extraídos das várias fontes listadas nas Referências). A Seção 3 apresenta os principais elementos da Linguagem de Decisão Lógica

[1] Financiamento FAPESP – Proc. Nº 98/05547-6

(LDL), subsidiada pela TCA; quando pertinente, uma avaliação crítica, na forma de comentários, é fornecida. Na Seção 4 são apresentadas as conclusões.

2. Teoria de Conjuntos Aproximados

2.1 Conceitos Básicos

O conceito básico da TCA é a noção de espaço aproximado, o qual é definido como um par ordenado $A = (U, R)$, onde:

- U: conjunto não vazio de objetos, chamado de *universo*
- R: relação de equivalência sobre U, chamada de relação de indiscernibilidade. Se $x, y \in U$ e xRy, então x e y são *indistingüíveis* em A

Cada classe de equivalência induzida por R, i.e., cada elemento do conjunto quociente $\widetilde{R} = U/R$ é chamado de *conjunto elementar* em A. Um espaço aproximado pode ser alternativamente notado por $A = (U, \widetilde{R})$. Assume-se que o conjunto vazio é também um conjunto elementar para todo espaço aproximado A. Um *conjunto definível* em A é qualquer união finita de conjuntos elementares em A. Para $x \in U$, seja $[x]_R$ a classe de equivalência de R que contém x. Num espaço aproximado $A = (U, R)$, qualquer conjunto $X \subseteq U$ é caracterizado por um par de conjuntos — a *aproximação superior* e a *aproximação inferior* em A, definidas respectivamente por:

$$A_{A\text{-inf}}(X) = \{x \in U \| [x]_R \subseteq X\}$$

$$A_{A\text{-sup}}(X) = \{x \in U \| [x]_R \cap X \neq \varnothing\}$$

A aproximação inferior de X em A é o maior conjunto definível em A contido em X e a aproximação superior de X em A é o menor conjunto definível em A contendo X. Um conjunto $X \subseteq U$ é definível em A se e só se $A_{\text{inf}}(X) = A_{\text{sup}}(X)$. Um conjunto aproximado em A é definido como a família de todos os subconjuntos de U que têm a mesma aproximação inferior e a mesma aproximação superior.

2.2 Sistema de Representação de Conhecimento

É comum em Inteligência Artificial expressar o conhecimento a respeito de um objeto em um espaço n-dimensional como um vetor n-dimensional de pares *atributo-valor_de_atributo* e uma classe associada. Um Sistema de Representação de Conhecimento assim caracterizado pode ser formalmente expresso como $S = \langle U, Q, V, f \rangle$, onde:

- U: conjunto finito de *objetos* descritos por atributos e seus valores
- $Q = C \cup \{d\}$ é o conjunto de *atributos*, onde C e d são chamados de *condições* e *classe* (ou decisão) respectivamente
- $V = \bigcup_{q \in Q} V_q$ é o conjunto de *valores de atributos*, onde V_q é o domínio do atributo $q \in Q$

- $f: U \times Q \rightarrow V$ é uma *função de descrição* tal que $f(u,q) \in V_q$, para todo $u \in U$ e $q \in Q$ (i.e., a função f atribui valores de atributo a cada objeto u em U). Um par (q,v), $q \in Q$, $v \in V_q$ é chamado de *descritor* em S. A função de descrição pode também ser notada por $f_u: Q \rightarrow V$, tal que $f_u(q) = f(u,q) \in V_q$, $u \in U$, $q \in Q$

Um Sistema de Representação de Conhecimento pode ser visualizado como uma tabela onde cada linha corresponde à descrição de um objeto e cada coluna representa um atributo (geralmente, o último atributo é identificado com a classe do objeto.)

Exemplo 1. Considere o SRC descrito pela Tabela 1, extraída de [Pawlak (1991)]. Nela U = $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$, Q = {p,q,r}, $V_p = \{0,1,2\}$, $V_q = \{0,1\}$ e $V_r = \{0,1,2\}$, i.e., V = {0,1,2}. Além disso,

1) {p}-conjuntos elementares: $X_1 = \{x_1,x_4,x_5,x_8,x_9\}$, $X_2 = \{x_2,x_7,x_{10}\}$, $X_3 = \{x_3,x_6\}$, mostrados na Figura 1
2) {p,r}-conjuntos elementares: $Y_1 = \{x_1,x_5,x_9\}$, $Y_2 = \{x_2,x_7,x_{10}\}$, $Y_3 = \{x_3,x_6\}$, $Y_4 = \{x_4,x_8\}$, mostrados na Figura 2
3) note que os Q-conjuntos elementares são também dados por Y_1, Y_2, Y_3 e Y_4

Tabela 1. SRC onde U=$\{x_1,x_2,\ldots,x_{10}\}$ e Q = {p,q,r}

	U	*p*	*q*	*r*
	x_1	1	0	2
⇒	x_2	0	1	1
	x_3	2	0	0
	x_4	1	1	0
	x_5	1	0	2
	x_6	2	0	0
	x_7	0	1	1
	x_8	1	1	0
	x_9	1	0	2
	x_{10}	0	1	1

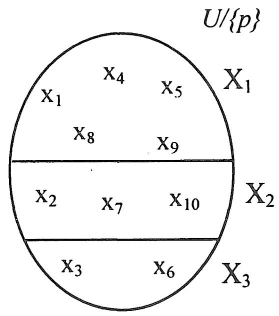

Figura 1. Partição do espaço U pela relação de equivalência "mesmo valor do atributo p"

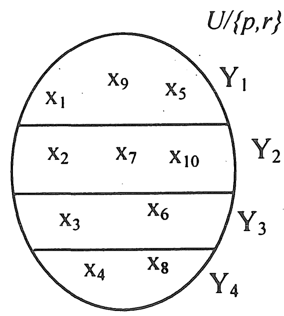

Figura 2. Partição do espaço U pela relação de equivalência "mesmo valor dos atributos p e q"

A Tabela 1 pode ser focalizada sob a ótica de uma Lógica Proposicional, i.e., cada linha da tabela pode representar uma expressão composta da lógica proposicional que descreve um determinado objeto do universo. A linha assinalada na Tabela 1, por exemplo, descreve o objeto x_2 usando a expressão proposicional $(p = 0) \wedge (q = 1) \wedge (r = 1)$, onde (p = 0), (q = 1) e (r = 1) são átomos desta lógica. Refinando um pouco mais esta abordagem, a tabela apresentada pode ser vista ainda como um formalismo que expressa uma *lógica de decisão*, usada para a derivação de conclusões, a partir das condições existentes.

3. Linguagem de Decisão Lógica

As definições e resultados para o estabelecimento da *linguagem de decisão lógica* (LDL) apresentados e tratados nesta seção foram extraidos de [Pawlak (1991)]. A LDL pode ser abordada como uma linguagem proposicional, cujos elementos básicos são *fórmulas atômicas*, ou átomos, representados por pares *atributo-valor*, que podem ser combinados através de conectivos, na formação de fórmulas mais elaboradas e com maior poder expressivo, denominadas *fórmulas compostas.*

Definição 1. O *alfabeto* da LDL consiste de:

1) Q – conjunto das constantes de atributos
2) $V = \bigcup_{q \in Q} V_q$ - conjunto das constantes de valores de atributos
3) conectivos proposicionais, i.e. $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (implicação) , $\equiv$ (equivalência)

É importante observar que o alfabeto da LDL não possui o conectivo $\leftrightarrow$. O símbolo de equivalência lógica ($\equiv$) é usado no seu lugar. O alfabeto da linguagem, assim definido, é essencialmente proposicional. Símbolos de variáveis, símbolos funcionais e símbolos predicativos, característicos de um um alfabeto de uma lógica de primeira ordem, não são permitidos. A LDL é tipicamente uma linguagem semelhante ao Cálculo Proposicional (CP), onde suas sentenças são construídas a partir dos elementos acima discriminados, i.e., símbolos representando atributos, símbolos representando valores de atributos, conectivos lógicos e símbolos delimitadores, tais como parêntesis. Os conjuntos Q e V_q são tratados como conjuntos de nomes de atributos e nomes de valores de atributos, respectivamente.

Definição 2. O conjunto de fórmulas da LDL é o menor conjunto que satisfaz as seguintes condições:

1) expressões da forma (q,v), também notadas por q_v, chamadas *fórmulas elementares (atômicas)*, são fórmulas da LDL para qualquer $q \in Q$ e $v \in V_q$
2) se Φ e Ψ são fórmulas da LDL, então também são fórmulas da LDL: $\neg\Phi$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $(\Phi \equiv \Phi)$

Exemplo 2. Considere como alfabeto de uma LDL aquele dado pelos conjuntos Q e V mostrados no Exemplo 1 e pelos conectivos proposicionais da Definição 1. As fórmulas atômicas dessa LDL são: (p,0), (p,1), (p,2), (q,0), (q,1), (r,0), (r,1), (r,2). São também fórmulas dessa LDL quaisquer combinações de fórmulas, usando aqueles conectivos. Por exemplo, $(((p,0) \wedge (p,1)) \vee (q,1)) \rightarrow (r,1)$, $(r,1) \vee \neg(q,1)$, $((q,0) \rightarrow (q,1) \wedge (r,0))$, $\neg(r,2)$, etc.

Comentário 1. É importante notar a peculiaridade da proposta da TCA como uma linguagem lógica para a expressão do conhecimento. Enquanto que na Lógica Proposicional não existe qualquer particularidade com relação às proposições atômicas, na LDL subconjuntos de proposições atômicas (proposições atômicas relativas ao mesmo atributo) têm relações estabelecidas entre elas; tais relações que não são sequer mencionadas na proposta, são de importância vital no estabelecimento da LDL como linguagem de descrição de conhecimento. Aqueles subconjuntos de proposições atômicas relativas ao mesmo atributo têm a seguinte característica: se uma de suas proposições for verdade, todas as demais são falsas. No Exemplo 2, se (p,0) for verdade, (p,1) e (p,2) são ambas falsas. Isso de certa forma implicaria alguns cuidados quando da definição do conceito de interpretação (uma interpreção, no Cálculo Proposicional corresponde à atribuição de valores-verdade aos átomos que comparecem em uma determinada fórmula). Óbvio que com a particularidade apontada acima, uma fórmula da LDL com N átomos, não necessáriamente terá 2^N possíveis interpretações, como acontece no Cálculo Proposicional.

3.1 Semântica da LDL

No contexto da LDL uma fórmula atômica *(q,v)* é *interpretada* como a descrição de todos os objetos que têm o valor v para o atributo q. Fórmulas compostas são interpretadas da maneira usual.

Comentário 2. Note que o conceito de interpretação de fórmulas atômicas é totalmente diferenciado daquele do Cálculo Proposicional. No Cálculo Proposicional, uma interpretação de uma fórmula atômica é a atribuição de um valor verdade (verdade ou falso) àquela fórmula.

Como comentado em [Pawlak (1991)], na página 83, "com o objetivo de expressar precisamente o problema da interpretação de fórmulas, será definida a semântica da LDL no estilo de Tarski, empregando as noções de modelo e satisfatibilidade. Por modelo, entendemos o sistema de representação de conhecimento S = (U,Q). Assim sendo, o modelo S descreve o significado dos *símbolos predicados* (q,v) em U; se interpretarmos as fórmulas nesse modelo, então cada fórmula se torna uma sentença significativa expressando propriedades de alguns objetos. Este conceito pode ser expresso mais precisamente usando o conceito de satisfatibilidade de uma fórmula por um objeto."

Comentário 3. É interessante notar, nesse ponto, que nessa última referência citada, o autor faz referência a símbolos predicados quando, na verdade, não existe o conceito de símbolo predicado (à semelhança com a Lógica de Primeira Ordem) na LDL sendo definida. Como pode ser evidenciado na Definição 1, o alfabeto sobre o qual a LDL vai ser estabelecida (Definição 2) não tem símbolos predicados; tais símbolos são, tipicamente, símbolos presentes em linguagens lógicas de primeira ordem.

Definição 3. Um objeto $x \in U$ *satisfaz* a fórmula Φ em S = (U,Q), fato denotado por $x \models_S \Phi$ ou simplesmente $x \models \Phi$ (se S é assumido), se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $x \models (q,v)$, se e só se $q(x) = v$
2. $x \models \neg\Phi$, se e só se não $x \models \Phi$
3. $x \models (\Phi \vee \Psi)$, se e só se $x \models \Phi \vee x \models \Psi$
4. $x \models (\Phi \wedge \Psi)$, se e só se $x \models \Phi \wedge x \models \Psi$

Como corolário das condições acima, temos:

5. $x \models \Phi \rightarrow \Psi$ se e só se $x \models \neg\Phi \vee \Psi$

6. $x \models \Phi \equiv \Psi$, se e só se $x \models \Phi \rightarrow \Psi \wedge x \models \Psi \rightarrow \Phi$

Note que na Definição 3, o fato de um objeto "satisfazer" uma fórmula é notado com o símbolo de conseqüência lógica do CP. Num paralelo, "$x \models (q,v)$" pode ser lida como (q,v) é uma fórmula verdadeira no domínio, se existir um elemento x do domínio onde $q(x) = v$.

Comentário 4. A verificação da satisfatibilidade de uma fórmula qualquer da LDL é realizada através da verificação da satisfatibilidade de suas sub-fórmulas (embora a definição de sub-fórmula não seja contemplada na proposta da LDL), até que a fórmula inicial seja reduzida a átomos que, finalmente, vão poder ser avaliados com relação ao seu valor verdade, pelo ítem 1 da Definição 3.

Comentário 5. Note que o conceito de satisfatilibidade definido para a LDL difere daquele do CP. Uma fórmula do CP é satisfatível se for verdadeira em alguma interpretação. Na LDL, satisfatibilidade está associada a elementos do domínio que são descritos por uma fórmula.

Comentário 6. Com relação ao ítem 1 da Definição 3 o autor em momento algum comenta sobre a expressão *q(x) = v*. O uso de tal expressão, a meu ver, implica que a LDL, da maneira como foi proposta pelas definições anteriores, deve ser revista. Afinal, se o conjunto de fórmulas da LDL é formado pelas chamadas fórmulas atômicas do tipo *(atributo,valor_do_atributo)* e pelas suas combinações via conectivos lógicos, como pode o autor da proposta usar *q(x) = v* onde, é óbvio, *q* está sendo usado como um símbolo predicativo? A LDL, da maneira como foi definida, não possui símbolos predicativos. Sem a consideração do conceito de *interpretação*, para as fórmulas da LDL, a definição de satisfatibilidade da Definição 3 fica, no mínimo, confusa.

Definição 4. Se Φ é uma fórmula da LDL então o *significado* da fórmula Φ em S é definido como o conjunto dos objetos: $|\Phi|_S = \{x \in U \text{ tal que } x \models_S \Phi\}$

O significado de uma fórmula é, pois, o conjunto dos objetos do domínio que satisfazem a fórmula. A explicação do significado de uma fórmula arbitrária é dada na proposição que segue.

Proposição 1.

1. $|(q,v)|_S = \{x \in U \mid q(x) = v\}$
2. $|\neg\Phi|_S = -\,|\Phi|_S$
3. $|\Phi \vee \Psi|_S = |\Phi|_S \cup |\Psi|_S$
4. $|\Phi \wedge \Psi|_S = |\Phi|_S \cap |\Psi|_S$
5. $|\Phi \rightarrow \Psi|_S = -\,|\Phi|_S \cup |\Psi|_S$
6. $|\Phi \equiv \Phi|_S = (|\Phi|_S \cap |\Psi|_S) \cup (-\,|\Phi|_S \cap -\,|\Psi|_S)$

Definição 5. Uma fórmula Φ é *verdade* em um sistema de representação de conhecimento S, fato notado por $\models_S \Phi$, se e só se $|\Phi|_S = U$, i.e., a fórmula é satisfeita por todos os objetos do universo do sistema S. Duas fórmulas Φ e Ψ são equivalentes em S se e só se $|\Phi|_S = |\Psi|_S$.

Proposição 2.

1. $\models_S \Phi$ se e só se $|\Phi|_S = U$
2. $\models_S \neg\Phi$ se e só se $|\Phi|_S = \varnothing$
3. $\models_S \Phi \rightarrow \psi$ se e só se $|\Phi|_S \subseteq |\psi|_S$
4. $\models_S \Phi \equiv \psi$ se e só se $|\Phi|_S = |\psi|_S$

Exemplo 3. Considere novamente o SRC do Exemplo 1. Então:

$$
\begin{array}{rl}
\Phi: (p,1) \wedge (q,0) & |\Phi|_S = \{x_1,x_5,x_9\} \\
 & -|\Phi|_S = \{x_2,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8,x_{10}\} \\
\Psi: (p,1) & |\Psi|_S = \{x_1,x_4,x_5,x_8,x_9\} \\
\varphi: (q,0) \vee (q,1) & |\varphi|_S = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\} \\
\lambda: (p,1) \wedge (r,2) & |\lambda|_S = \{x_1,x_5,x_9\}
\end{array}
$$

- como $|\varphi|_S = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\} = U$, diz-se que φ é verdade em S notado por $|=_S \varphi$
- como $|\lambda|_S = |\Phi|_S$ pode-se escrever que $\lambda \equiv \Phi$
- como $|\Phi|_S \subseteq |\Psi|_S$, pode-se escrever que $|=_S \Phi \rightarrow \Psi$, i.e., que a fórmula $\Phi \rightarrow \Psi$ é verdade em S, i.e., $|\Phi \rightarrow \Psi|_S = U$. De fato, $|\Phi \rightarrow \Psi|_S = |\neg\Phi \vee \Psi|_S = |\neg\Phi| \cup |\Psi|_S = -|\Phi|_S \cup |\Psi|_S = \{x_2,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8,x_{10}\} \cup \{x_1,x_4,x_5,x_8,x_9\} = U$

3.2 Processos Dedutivos em Lógica de Decisão

Conforme apontado em [Pawlak (1991)], os axiomas a serem estabelecidos para a LDL correspondem aos axiomas do cálculo proposicional. Assim sendo, o conjunto de todos os axiomas da lógica de decisão consiste de todas as tautologias proposicionais e de alguns axiomas específicos. No que segue, serão adotadas as seguintes abreviações: $\Phi \wedge \neg\Phi = 0$ e $\Phi \vee \neg\Phi = 1$. Obviamente, $|= 1$ e $|= \neg 0$. Assim 0 e 1 podem ser considerados para denotar falsidade e verdade, respectivamente.

Definição 6. Uma fórmula na forma $(q_1,v_1) \wedge (q_2,v_2) \wedge \ldots \wedge (q_n,v_n)$ onde $v_i \in V_{q_i}$, $P = \{q_1,q_2,\ldots,q_n\}$ e $P \subseteq Q$ e' chamada de *fórmula P-básica* ou *P-fórmula. Fórmulas Q-básicas* sao chamadas simplesmente de fórmulas básicas.

Exemplo 4. Fórmulas Q-básicas são então fórmulas expressas como uma conjunção de fórmulas atômicas, utilizando todo o conjunto de atributos que define o sistema de rerpesentacão de conhecimento. No contexto do sistema de representação de conhecimento descrito no Exemplo 1, qualquer uma das seguintes é uma fórmula básica: $(p,1) \wedge (q,0) \wedge (r,2)$, $(p,0) \wedge (q,0) \wedge (r,0)$, $(p,0) \wedge (q,1) \wedge (r,1)$. Já a fórmula $(p,0) \wedge (q,1)$ é uma $\{p,q\}$-fórmula.

Definição 7. Seja S=(U,Q) um sistema de representação de conhecimento. Sejam $P \subseteq Q$, Φ uma P-fórmula e $x \in U$.

1) se $x |= \Phi$, então Φ será chamada de *P-descrição de x em S*
2) conjunto de todas as fórmulas Q-básicas em S será chamado de *conhecimento básico* em S
3) a fórmula notada por $\sum_S(P)$, ou simplesmente $\sum(P)$, é a disjunção de todas as *P-fórmulas satisfatíveis* em S; se P = Q, então $\sum(Q)$ será chamada *de fórmula característica* do sistema de representação de conhecimento S. A fórmula característica representa o conhecimento total contido no sistema S.

Cada linha da tabela que compõe um SRC pode ser representada na LDL por uma determinada Q-fórmula. Por outro lado, a tabela toda pode ser representada como uma disjunção dessas Q-fórmulas que, como definido, é fórmula característica do sistema.

Comentário 7. Apesar do autor estar usando o termo *fórmula satisfatível*, no item 3 da Definição 7, não se preocupou em defini-lo. Define quando um objeto satisfaz à uma fórmula, mas não define quando uma fórmula é satisfatível. Assumimos aqui que uma fórmula α é satisfatível em um SRC dado por (U,Q) quando existe pelo menos um objeto de U que satisfaz α.

Exemplo 5. Considere o sistema de representação do conhecimento S = (U,Q), onde $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, Q = {a,b,c}, $V_a = \{1,2\}$, $V_b = \{0,1\}$, $V_c = \{1,2,3\}$, descrito pelas quatro primeiras colunas da Tabela 2.

Tabela 2. $S=(\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\},\{a,b,c\})$ e suas fórmulas básicas

S = (U,Q)				*fórmulas básicas*		
U	*a*	*b*	*c*			
x_1	1	0	2	$a=1 \wedge b=0 \wedge c=2$	$a_1 \wedge b_0 \wedge c_2$	$a_1b_0c_2$
x_2	2	0	3	$a=2 \wedge b=0 \wedge c=3$	$a_2 \wedge b_0 \wedge c_3$	$a_2b_0c_3$
x_3	1	1	1	$a=1 \wedge b=1 \wedge c=1$	$a_1 \wedge b_1 \wedge c_1$	$\mathbf{a_1b_1c_1}$
x_4	1	1	1	$a=1 \wedge b=1 \wedge c=1$	$a_1 \wedge b_1 \wedge c_1$	$\mathbf{a_1b_1c_1}$
x_5	2	1	3	$a=2 \wedge b=1 \wedge c=3$	$a_2 \wedge b_1 \wedge c_3$	$a_2b_1c_3$
x_6	1	0	3	$a=1 \wedge b=0 \wedge c=3$	$a_1 \wedge b_0 \wedge c_3$	$a_1b_0c_3$

As três últimas colunas da Tabela 2. descrevem, para cada linha, a fórmula básica correspondente. Note que as fórmulas básicas correspondentes às terceira e quarta linhas são iguais; esse sistema, portanto, tem cinco fórmulas básicas. A fórmula característica de S, satisfeita por qualquer objeto do universo, é então dada por: $a_1b_0c_2 \vee a_2b_0c_3 \vee a_1b_1c_1 \vee a_2b_1c_3 \vee a_1b_0c_3$. A Tabela 3 mostra o significado de algumas possíveis fórmulas do sistema.

Tabela 3. Fórmulas na LDL do sistema $S=(\{x_1,\ldots,x_6\},\{a,b,c\})$e seus significados

$\|a_1 \vee b_0c_2\|$	$\|a_1\| \cup \|b_0c_2\|$	$\{x_1,x_3,x_4,x_6\}$
$\|\neg(a_2 \wedge b_1)\|$	$-(\|a_2\| \cap \|b_1\|)$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6\}$
$\|a_1 \rightarrow b_0\|$	$-(\|a_1\|) \cup \|b_0\|$	$\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$
$\|b_0 \rightarrow c_2\|$	$-(\|b_0\|) \cup \|c_2\|$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$
$\|a_2 \equiv b_0\|$	$(\|a_2\| \cap \|b_0\|) \cup (-\|a_2\| \cap -\|b_0\|)$	$\{x_2,x_3,x_4\}$
$\|\neg c_3 \wedge \neg b_0 \wedge \neg a_1\|$		$\varnothing$
$\|a_2 \rightarrow \neg(b_0c_3)\|$	$-(\|a_2\|) \cup -(\|b_0\| \cap \|c_3\|)$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}$
$\|a_1 \vee a_2\|$	$\|a_1\| \cup \|a_2\|$	U

3.3 Axiomas da LDL

Axioma 1. $(q,v_1) \wedge (q,v_2) \equiv 0$, $\forall$ q $\in$ Q, $v_1, v_2 \in V_q$ e $v_1 \neq v_2$

expressa que cada objeto não pode ter mais do que um valor associado a cada atributo.

Axioma 2. $\bigvee_{v\in Vq} (q,v) \equiv 1$, para todo q $\in$ Q

expressa que cada atributo deve assumir um dos valores de seu domínio, para todo objeto no sistema.

Axioma 3. $\neg(q,v) \equiv \bigvee_{u \in Vq,\ u \neq v} (q,u)$, para todo $q \in Q$

permite a eliminação da negação — ao invés de dizer que um objeto não possui uma dada propriedade, diz-se que ele tem uma das propriedades restantes.

Comentário 8. O Axioma 3 deveria ser reescrito, para evitar dubiedade, como:

$$\text{para todo } q \in Q,\ \neg(q,v) \equiv \bigvee_{u \in Vq,\ u \neq v} (q,u)$$

Proposição 3. $\models_S \sum_S (P) \equiv 1$, para $\forall\ P \subseteq Q$

assume a hipótese do mundo fechado (*closed world assumption*).

Definição8. Diz-se que uma fórmula Φ é *derivável* a partir de um conjunto de fórmulas Ω, fato denotado por $\Omega \vdash \Phi$, se e só se for derivável a partir das fórmulas de Ω e dos axiomas, através de um número finito de aplicação da regra de inferência *modus ponens*.

Definição 9. Uma fórmula Φ é um *teorema* da lógica de decisão, simbolicamente representada por $\vdash \Phi$, se for derivável a partir apenas dos axiomas.

Definição 10. Um conjunto de fórmulas Ω é *consistente* se e só se a fórmula $\Phi \wedge \neg\Phi$ não for derivável a partir de Ω.

Definição 11. Uma fórmula Φ é não-vazia se $|\Phi| \neq \varnothing$.

3.3 Forma Normal

As fórmulas da LDL podem ser escritas numa forma particular, chamada de forma normal, de maneira similar às formas normais do cálculo proposicional.

Definição 12. Seja $P \subseteq Q$ um subconjunto do conjunto de atributos e seja Φ uma fórmula na linguagem de representação de conhecimento. Dizemos que Φ é uma P-forma normal em S (ou simplesmente P-forma normal) se e só se:

1. é 0 ou
2. é 1 ou
3. Φ é uma disjunção de fórmulas P-básicas não vazias

Uma Q-forma normal será referenciada como *forma normal*.

Exemplo 6. Considere o sistema de representação do conhecimento S = (U,Q) descrito no Exemplo 5. A Tabela 4 mostra a forma normal de algumas fórmulas que aparecem na Tabela 3.

Tabela 4. Fórmulas e suas correspondentes Formas Normais

Fórmula	*Forma Normal*
$a_1 \vee b_0c_2$	$a_1b_0c_2 \vee a_1b_1c_1 \vee a_1b_0c_3$
$\neg(a_2 \wedge b_1)$	$a_1b_0c_2 \vee a_2b_0c_3 \vee a_1b_1c_1 \vee a_1b_0c_3$
$b_0 \rightarrow c_2$	$a_1b_0c_2 \vee a_1b_1c_1 \vee a_2b_1c_3$
$a_2 \equiv b_0$	$a_2b_0c_1 \vee a_2b_0c_2 \vee a_2b_0c_3 \vee a_1b_1c_1 \vee a_1b_1c_2 \vee a_1b_1c_3$

Exemplos de fórmulas da Tabela 4, em {a,b}-forma normal estão mostradas na Tabela 5.

Tabela 5. {a,b}- Forma Normal

Fórmula	*{a,b}-Forma Normal*
$\neg(a_2 \wedge b_1)$	$a_1b_0 \vee a_2b_0 \vee a_1b_1 \vee a_1b_0$
$a_2 \equiv b_0$	$a_2b_0 \vee a_1b_1$

Por outro lado, a fórmula $b_0 \rightarrow c_2$ em {b,c}-forma normal é: $b_0c_2 \vee b_1c_1 \vee b_1c_3$.

Exemplo 7. Esse exemplo aborda sistematicamente a construção da forma normal associada a uma fórmula da LDL. Considere novamente o SRC descrito no Exemplo 5 e seja a fórmula $a_1 \vee b_0c_2$. Os átomos da LDL associada a este sistema são: (a,1),(a,2),(b,0),(b,1), (c,1), (c,2), (c,3). A FND da fórmula dada é: $a_1b_0c_1 \vee a_1b_0c_2 \vee a_1b_0c_3 \vee a_1b_1c_1 \vee a_1b_1c_2 \vee a_1b_1c_3 \vee a_2b_0c_2$. Entretanto:

$|a_1b_0c_1|_S = \emptyset$ $\quad |a_1b_0c_2|_S = \{x_1\}$ $\quad |a_1b_0c_3|_S = \{x_6\}$ $\quad |a_1b_1c_1|_S = \{x_3\}$

$|a_1b_1c_2|_S = \emptyset$ $\quad |a_1b_1c_3|_S = \emptyset$ $\quad |a_2b_0c_2|_S = \emptyset$

portanto, a FND se reduz a $a_1b_0c_2 \vee a_1b_0c_3 \vee a_1b_1c_1$.

Comentário 9. A regra da tabela do CP, para a obtenção da FND, que estabelece que:

"Para a obtenção da FND de uma fórmula não contraditória α, procura-se na tabela-verdade de α as interpretações $I_1, I_2, \ldots, I_k$, que tornam a fórmula verdadeira. Para cada uma dessas interpretações I_i $(1 \leq i \leq k)$, constrói-se a conjunção da seguinte maneira:

> se o valor do componente atômico p de α com respeito a I_i for v, toma-se p e se for f, toma-se $\neg$p; em seguida determina-se a disjunção das conjunções obtidas em cada uma das interpretações I_i."

não pode ser aplicada diretamente à LDL. A razão disto deve-se ao fato da existência da relação entre as proposições atômicas, conforme apontado no Comentário 1. Por essa razão, nos exemplos anteriores, foi necessária a construção de uma árvore de decisão ao invés de uma tabela de decisão. Quando a proposição atômica (p,v_{p_i}) for verdade, necessariamente as proposições atômicas (p,v_{p_1}) (p,v_{p_2}) ... (p,v_{p_k}) são falsas. A Figura 3 mostra essa situação.

4. Conclusões

Este artigo aborda a TCA como um formalismo que subsidia o estabelecimento de uma linguagem lógica, LDL, à semelhança do CP, para a representação de conhecimento. Apresenta os principais conceitos da LDL, exatamente como propostos em [Pawlak (1991)] e os analisa criticamente apontando, via comentários, a falta de rigor no estabelecimento de tal linguagem. De qualquer forma, mesmo que abordada com rigor, a linguagem lógica baseada na TCA é ainda proposicional e, como tal, bastante limitada para a representação de conhecimento.

Como linguagem para a expressão de conceitos induzidos (quando do uso da TCA para subsidiar técnicas de aprendizado de máquina), não oferece vantagens com relação às árvores de decisão e regras de produção Árvores de decisão e regras de produção são as representações de conhecimento mais comuns utilizadas em sistemas indutivos simbólicos de aprendizado de máquina e são, como a LDL, linguagens proposicionais. Sistemas que aprendem conceitos expressos como árvores de decisão (ID3, por exemplo) [Quinlan (1986)] ou como regras de produção (CN2, por exemplo) [Clark (1989)] têm sido empregados com razoável sucesso e, devido ao fato de aprenderem apenas conceitos passíveis de serem expressos proposicionalmente, são limitados. A LDL, se empregada em sistemas de aprendizado, não vai contribuir para ampliar o escopo de utilização de técnicas de aprendizado simbólico, por se tratar de uma linguagem proposicional.

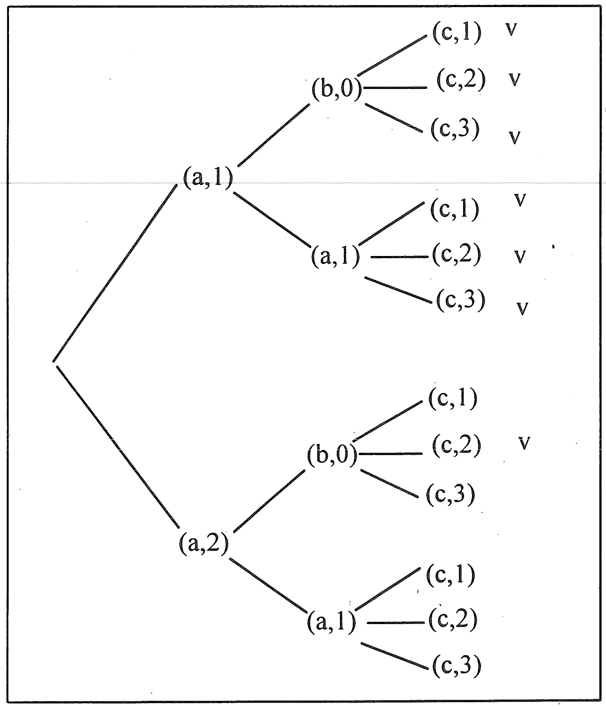

Figura 3. Determinação da FND

Referências

[Aasheim & Solheim (1996)] Aasheim, O. T.; Solheim, H. G. Rough Set as a Framework for Data Mining. Project Report of Knowledge Systems Group - Faculty of Computer Systems and Telematics - Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, 1996,147 pp.

[Clark (1989)] Clark, P.; Niblett, T. The CN2 Induction Algorithm. Machine Learning 3, 1989, pp 261-283.

[Jelonek et al. (1994)] Jelonek, J.; Krawiec, K.; Slowinski, R. Rough Set Reduction of Attributes and Their Domains For Neural Networks. Computational Intelligence, vol. 2, No. 5 , 1994, pp 1-10.

[Mrózek (1992)] Mrózek, A. A New Method for Discovering Rules from Examples in Expert Systems, Int. Journal of Man-Machine Studies 36, 1992, pp 127-143.

[Orlowska & Pawlak (1984)] Orlowska, E.; Pawlak, Z. Expressive Power of Knowledge Representation Systems. Int. Journal of Man-Machine Studies, 20, 1984, pp 485-500.

[Pawlak (1982)] Pawlak, Z. Rough Sets. International Journal of Information and Computer Science, 11(5), 1982, pp 341-356.

[Pawlak (1984)] Pawlak, Z. Rough Classification, Int. Journal of Man-Machine Studies, 1984, pp 469-483.

[Pawlak (1985)] Pawlak, Z.: On Learning – a Rough Set Approach. Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Nº 208, 1985, pp 197-227.

[Pawlak (1991)] Pawlak, Z. Rough Sets - Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[Pawlak (1994)] Pawlak, Z. Hard and Soft Sets. Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery, W.P. Ziarko (ed.), Springer-Verlag, 1994, pp 130-135.

[Quinlan (1986)] Quinlan, J. R. Induction of Decision Trees. Machine Learning, 1, 1986, pp. 81-106.

[Skowron & Grzymala-Busse (1994)] Skowron, A.; Grzymala-Busse, J. From Rough Set Theory to Evidence Theory. Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence, R. Yager; M. Fedrizzi; J. Kacprzyk (eds.), John Wiley & Sons, 1994, pp 193-236.

[Szladow & Ziarko (1993)] Szladow, A.; Ziarko W. Rough Sets: Working with Imperfect Data, AI Expert, July 1993, pp 36-41.

[Wong et al. (1986)] Wong, S. K. M.; Ziarko, W.; Ye, R. L. Comparison of Rough Set and Statistical Methods in Inductive Learning. Int. Journal Man-Machine Studies, 24, 1986, pp 53-72.